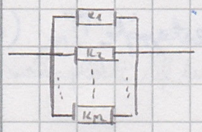
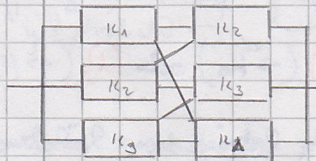
22.05.2014 b) <u>paralleles System</u> System intakt genau dann, wenn K_1 oder K_2 oder ... oder K_n intakt.



$\xrightarrow[a)]{\text{Vgl. mit}}$ $$\boxed{1-R = (1-R_1)(1-R_2)\dots(1-R_n)}$$

c) <u>2 von 3 System</u> kann <u>nicht</u> mit den Formeln in a) und b) behandelt werden.



$$R = P(\underbrace{K_1 \wedge K_2}_{A} \vee \underbrace{K_2 \wedge K_3}_{B} \vee \underbrace{K_3 \wedge K_1}_{C})$$

$$P = (A \vee B \vee C) \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Sieb-}}{=}} P(A)+P(B)+P(C)-P(A\wedge B)-P(B\wedge C)-P(A\wedge C) + P(A\wedge B\wedge C)$$

$A \wedge B = B \wedge C = C \wedge A$

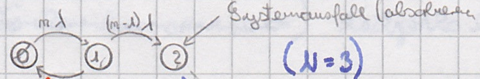
$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow R &= P(K_1\wedge K_2)+P(K_2\wedge K_3)+P(K_3\wedge K_1) - 3P(K_1\wedge K_2\wedge K_3) + P(K_1\wedge K_2\wedge K_3) \\ &\overset{\text{unabhäng.}}{=} R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 - 2R_1R_2R_3 \end{aligned}}$$

18

Allgemein: <u>Zuverlässigkeit eines m-von-n Systems</u> (mit Reparatur)

Erläuterung am Spezialfall <u>$m = n-1$</u>

ZSB $\rightarrow$ Intensitätsgraph:



$(N=3)$

SP11

Intensitätsmatrix: $B := \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & 0 \\ \mu & -\mu-(m-1)\lambda & (m-1)\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\neq$ Übergangsmatrix (P, Q) $\Rightarrow$ Intensitätsmatrix ist keine stoch. Matrix

Es gibt nur eine Grenzverteilung ($\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{p}B = \vec{0}$), und für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$\Pi_0(t), \Pi_1(t), \Pi_2(t)$ im Zustand 0, 1 bzw. 2 gilt. $\boxed{R(t) = \Pi_0(t) + \Pi_1(t) = 1-\Pi_2(t)}$

Bem: Hier gilt $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$ (da ② absorbierend) (langfristig wird das System ausfallen)

Bestimmung von $\Pi_2(t)$ bzw. $R(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation angewendet auf DGL

$\boxed{\dot{P} = PB}$ der Übergangsmatrix $P = P(t)$: $\Pi_2(t) = \Lambda \sum_{j=0}^{N-1} \Pi_j e^{v_j t}$ mit $\Lambda := (-1)^{N-1} v_1 \dots v_{N-1}$

$v_j < 0$ als NST des charakteristischen Polynoms von $\tilde{B} := \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda \\ \mu & -\mu-(m-1)\lambda \end{pmatrix}$ $(j = 1; 2 = N-1)$

19 $\Pi_j := \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N-1} \frac{1}{v_j - v_k}$

Charakteristisches Polynom von $\tilde{B}$: $\begin{vmatrix} -m\lambda - x & m\lambda \\ \mu & -\mu-(m-1)\lambda - x \end{vmatrix} = x^2 + (\mu + 2m\lambda - \lambda)x + \overbrace{m(m-1)\lambda^2}^{v_1 v_2 \ (*)}$ für das Gleiche

23 NST $v_{1,2} = \dfrac{\lambda - \mu - 2m\lambda \pm \sqrt{\underbrace{\lambda^2 + \mu^2 + 2(2m-1)\lambda\mu}_{d = \text{Diskriminante}}}}{2} = \dfrac{-(2m-1)\lambda - \mu \pm \sqrt{d}}{2}$ mit d

$\Rightarrow \Lambda = m(m-1)\lambda^2$ (*2)

$\Pi_1 = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{2} \frac{1}{v_1 - v_k} \overset{v_0=0}{=} \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{v_1 - v_2}$; $\Pi_2 = \prod_{\substack{k=0 \\ \text{da } k\neq 2}}^{1} \frac{1}{v_2 - v_k} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{v_2 - v_1}$

Mit $v_2 < v_1 < 0$ ergibt sich $v_1 - v_2 = -\sqrt{d}$; $\Pi_0 = \prod_{k=1}^{2} \frac{1}{-v_k} = \frac{1}{v_1 v_2} \overset{(*)\&(*2)}{=} \frac{1}{\Lambda}$

20 $\Rightarrow \Pi_2(t) = \dfrac{\overbrace{1 - m(m-1)\lambda^2}^{\Lambda}}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{-1}{v_2} e^{v_2 t} - \frac{1}{v_1} e^{v_1 t}\right)$

$\Rightarrow R(t) = \dfrac{\overset{= v_1 v_2}{m(m-1)\lambda^2}}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{v_2} e^{v_2 t} - \frac{1}{v_1} e^{v_1 t}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{d}} \left(v_1 e^{v_2 t} - v_2 e^{v_1 t}\right)}$ Zuverlässigkeit von einem $(m-1)$-von-m Reparatursystem mit absorbierendem Systemausfall

22.05.2014

Q2

<u>Zahlenbeispiel</u>: $n = 3$ Reparaturrate $\mu := 5$ (pro Monat), Ausfallrate $\lambda := 1$ (pro Monat) eines einzelnen Element

(mit Einzelzuverlässigkeit $R_i(t) := e^{-\lambda t}$ für $i = 1, 2, 3$)

$$\Rightarrow R(t) = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1^2 + 2\cdot 5\cdot 1\cdot 5 + 5^2}_{d\,=\,\lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2}}} \cdot \left(\frac{-5\cdot 1 - 5 - \sqrt{76}}{2} \cdot e^{(-10\sqrt{76})t/2} - \frac{10 + \sqrt{76}}{2} e^{(-10 - \sqrt{76})t/2} \right)$$

$d = 76$

$$\text{für } t \text{ (pro Monat)} \Rightarrow R(6) = \frac{1}{\sqrt{76}} \left(\frac{-10 - \sqrt{76}}{2} e^{3(-10 + \sqrt{76})} - \frac{-10 + \sqrt{76}}{2} e^{3\cdot(-10 - \sqrt{76})} \right)$$

$R(t) = 0{,}023$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das dieses System nach 6 Monaten noch intakt ist.